

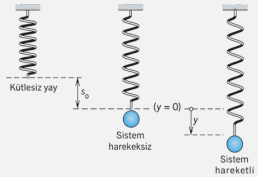
GİRİŞ

Rezonans, zorlanmış titreşim yapan bir sistemde, dış kuvvetin açısal frekansı (ω) ile sistemin doğal açısal frekansı (ω_0) eşit veya çok yakın olduğunda ($\omega \approx \omega_0$), sistemin uzun süre sonra ulaştığı titreşim hareketinin genliğinin maksimuma ulaşması olarak tanımlanır.

Bu koşul altında sistem, dış kuvvetten aldığı enerjiyi en verimli şekilde biriktirir ve teorik olarak genlik sınırsız biçimde büyüyebilir.

SÖNÜMSÜZ SİSTEM

Her sistemde bir miktar sönüm vardır. Aksi halde sonsuza kadar hareket etmeye devam edecektir. Ancak sönüm küçükse ve hareket nispeten kısa bir zaman aralığında inceleniyorsa, sönüm ihmal edilebilir.



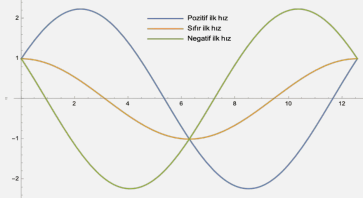
Sönümsüz sistemin genel denklemi şu şekildedir:

$$my'' + ky = 0$$

Bu, katsayıları sabit olan homojen doğrusal bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

şeklinde. Bu denklemde $y(t)$ çözümü yer değiştirmeyi ve ω_0 sistemin doğal frekansını ifade eder.



$$y'(0) < 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(0) > 0$$

Sönümsüz sistemde rezonans koşulu altında sistemin tepkisi yalnızca frekans eşleşmesiyle değil, aynı zamanda bu tepkinin genliği ve dış kuvvetle arasındaki faz ilişkisi ile de karakterize edilir. Genlik ve faz kaymasının fiziksel özelliklerinin alternatif bir gösterimi şudur:

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta)$$

Burada

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

ve faz açısı δ olup

$$\tan \delta = \frac{B}{A}$$

şeklinde tanımlanır.

SÖNÜMLÜ SİSTEM



Sönümlü kütle-yay sisteminin diferansiyel denklemi şu şekildedir;

$$my'' + cy' + ky = 0$$

Bu denklemde sönümsüz sistemden farklı olarak sönümleyici (c) katsayısı vardır.

Sönümsüz sistemin karakteristik denklemi ise şu şekildedir;

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Bu ikinci derecenin denklemin kökleri;

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

olup burada;

$$\alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{a^2 - 4mk}$$

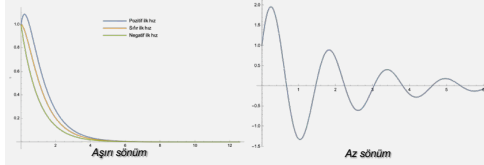
Bu durumda denklemin genel çözümü

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

şeklinde.

Sönümün büyüklüğüne bağlı olarak üç farklı tip salınım ortaya çıkabilir:

- **Durum I** : $c^2 > 4mk$ – (**Aşırı sönüm**)
- **Durum II** : $c^2 = 4mk$ – (**Kritik sönüm**)
- **Durum III** : $c^2 < 4mk$ – (**Az sönüm**)



REZONANS

Şimdi ise sisteme, zamana bağlı bir dış kuvvet etki ettiğinde ortaya çıkan zorlanmış titreşimleri ele alacağız. Bu durumda kütle-yay sistemi için hareket denklemi şu şekildedir:

$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

Burada $F(t)$, sisteme uygulanan dış kuvvettir. Özel olarak

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

alalım. Bu durumda denklemin özel çözümü belirsiz katsayılar yöntemi ile

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2 + c^2}, \quad b = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2 + c^2}$$

olmak üzere

$$y_p(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

olarak bulunur.

Şimdi sönümsüz sistemi ele alırsak, yani $c = 0$ için genel çözüm

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

olur. Buradan görüleceği üzere $\omega \rightarrow \omega_0$ için, yani dış kuvvetin frekansının sistemin doğal frekansına yaklaşması sonucu büyük genlikli salınımlar oluşmaya başlamaktadır. Dış frekansın doğal frekansa eşit olması ile de sonsuz genlik ya da diğer bir deyişle rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak denklemin son hali şu şekildedir:

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Sönümsüz durumda $\omega \rightarrow \omega_0$ iken, özel çözümün genliği sonsuza yaklaşıyordu. Sönümlü durumda ise bu gerçekleşmez. Sistem maksimum genliğe ulaşabilir. Bu nedenle hasara veya yıkıma neden olsa dahi genlik sonsuz şekilde büyümaz. Buna pratik rezonans denir. Sönümlü sistemin rezonansının denklemi

$$y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta)$$

halini alır. Burada C^* genlik, η ise faz gecikmesi olarak adlandırılır. Maksimum genliğin denklemi de şu şekildedir:

$$C^*(\omega_{max}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

KULLANIM ALANLARI



Rezonans; elektronik alanında, RLC devrelerinde frekans seçimi için kullanılır. İstenilen frekanstaki sinyaller güçlendirilirken diğerleri bastırılır.

Makine ve inşaat mühendisliğinde, yapıların titreşim davranışı analiz edilerek rezonansın olumsuz etkileri sönümleyicilerle azaltılır. Tacoma Narrows Köprüsü'nün 1940 yılında rüzgâr kaynaklı rezonans nedeniyle yıkılması, bu konunun önemini açıkça göstermektedir.

Tıp alanında ise manyetik rezonans görüntüleme (MRI), atom çekirdeklerinin rezonans özelliklerinden yararlanarak ayrıntılı ve zararsız görüntüler elde edilmesini sağlar.

KAYNAKÇA

1. Advanced engineering mathematics, 10th Edition by Kreyszig Erwin
2. Structural Vibration: Analysis and Damping by C.F. Beards