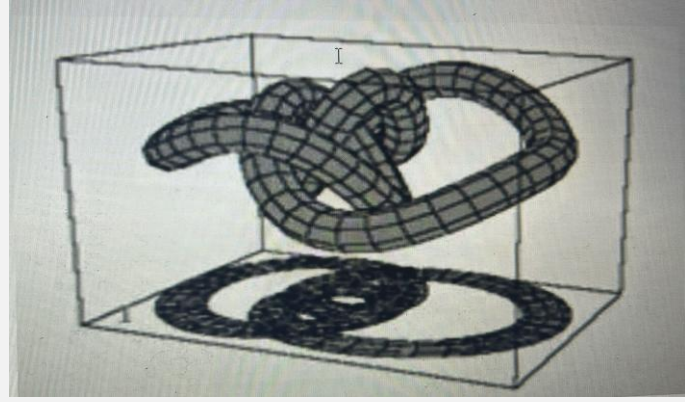


DÜĞÜM TEORİSİ

DANIŞMAN: Doç. Dr. Canan AKIN
Berfin Nur ÖZOĞLU

GİRİŞ



Düğüm teorisi, üç boyutlu uzaydaki eğrilerin topolojik özelliklerini inceleyen bir matematiksel teodir. İki düğümün topolojik olarak aynı olup olmadığını ve düğümlerin nasıl sınıflandırılabileceğini araştırır. Düğüm, uzayda basit kapalı bir eğri veya bir ipin kendisine dolanması ya da birbirine karışması sonucu meydana gelen yapı olarak tanımlanır

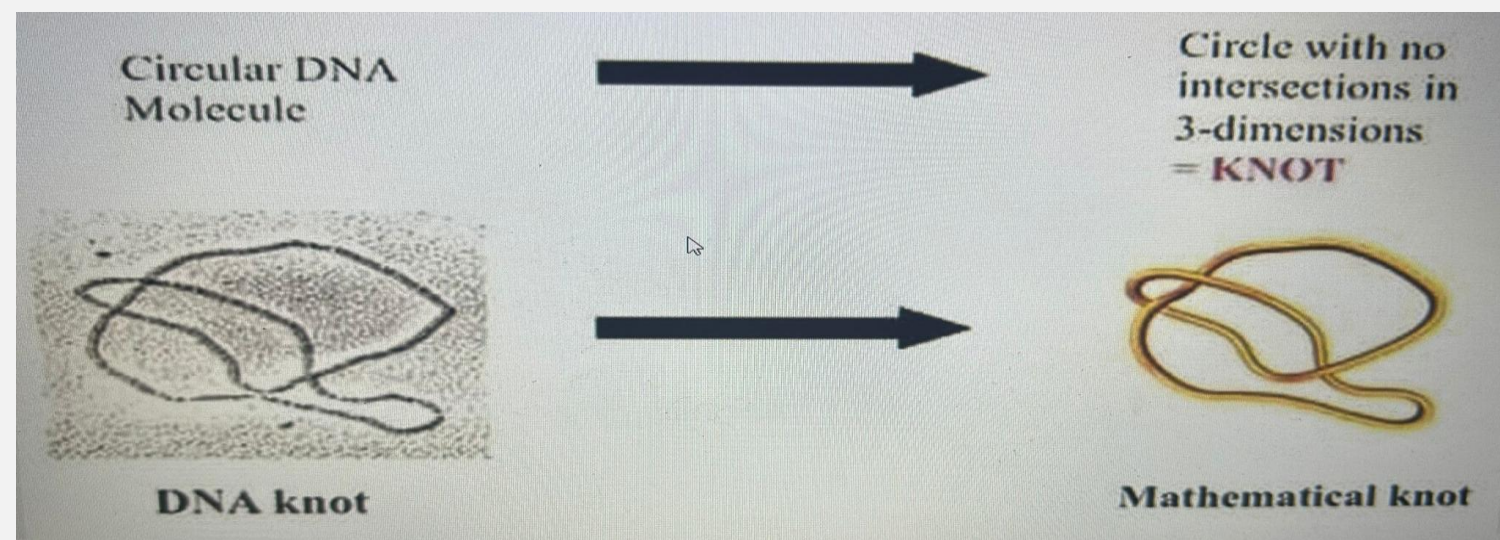
Bir düğüm, bir çemberin üç boyutlu uzaya gömülmesidir: $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Burada:

- $S^1 \rightarrow$ birim çember
- $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ üç boyutlu Öklid uzayı
- $\rightarrow$ gömme (embedding) anlamına gelir.

İki düğüm K_1 ve K_2 , eğer $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde sürekli bir dönüşüm (izotopi) ile biri diğerine geçiyorsa eşdeğer (izotopik) kabul edilir.

DÜĞÜM TEORİSİ TARİHÇESİ

Düğüm teorisi, 19. yüzyılın sonlarına doğru matematikte bağımsız bir araştırma alanı olarak ortaya çıkmıştır. Bu alanın doğuşu, Lord Kelvin (William Thomson)'in atomların farklı düğüm türlerinden oluştuğunu ileri sürdüğü fiziksel modelle ilişkilidir. Her ne kadar bu atom modeli daha sonra geçerliliğini yitirmiş olsa da, düğümlerin matematiksel olarak incelenmesine önemli bir motivasyon sağlamıştır. 1870'li yıllarda Peter Guthrie Tait, düğümleri sistematik biçimde sınıflandırarak ilk düğüm tablolarını oluşturmuş ve düğüm teorisinin gelişiminde temel bir rol üstlenmiştir. yüzyılın ortalarında ise Kurt Reidemeister, düğümlerin birbirine dönüşümünü açıklayan üç temel hareketi (Reidemeister hareketleri) tanımlamış ve modern düğüm teorisinin kuramsal temellerini atmıştır. Günümüzde düğüm teorisi; kuantum topolojisi, sicim teorisi, moleküler biyoloji ve fizik gibi birçok çağdaş alanda önemli uygulamalara sahip, disiplinler arası bir çalışma alanı olarak gelişimini sürdürmektedir.



MATEMATİKSEL TEMELLER

Bir düğüm, uçları birleştirilmiş, uzayda yer alan kapalı bir eğri olarak tanımlanır. Birden fazla kapalı eğrinin birlikte oluşturduğu yapı ise bağ (link) olarak adlandırılır.

İki düğüm, aralarındaki ip kesilmeden; yalnızca bükme, esnetme veya döndürme işlemleriyle birbirine dönüştürülebiliyorsa eşdeğer kabul edilir. Bu tür dönüşümler uzayın sürekliliğini bozmayan deformasyonlar olarak değerlendirilir.

Düğümleri sınıflandırmak, karşılaştırmak ve birbirinden ayırt edebilmek için çeşitli matematiksel değişmezler ve kuramsal araçlar kullanılır.

düğüm	Polinom	Özellik
Basit halka (unknot)	$\Delta(t) = 1$	Çözülebilir
Trefoil (üç yapraklı)	$\Delta(t) = t^2 - t + 1$	İlk gerçek düğüm
Figure-eight (8 şekli)	$\Delta(t) = t^2 - 3t + 1$	Eşlenik olmayan tek düğüm

ÖNEMLİ TEOREMLER

1.REIDEMEİSTER TEOREMİ

İki düğüm K_1 ve K_2 izotopiktir ancak ve ancak düğümlerin düzlemdeki projeksiyonları aşağıdaki üç hareketle birbirine dönüştürülebilir:

1. Burulma (twist)
2. Kaydırma (poke)
3. üçlü geçiş (slide)

Bu teorem düğüm eşdeğerliğinin geometrik tanımıdır.

2.ALEXANDER POLİNOMU

Her düğüm K 'ye bir polinom $\Delta_K(t)$ atanabilir. Bu polinom, düğümün yapısına göre değişmez (bir "invariant"tir).

Örnekler:

$$\Delta_{\text{unknot}}(t) = 1$$

$$\Delta_{\text{trefoil}}(t) = t^2 - t + 1$$

Bu sayede iki düğümün aynı olup olmadığı cebirsel olarak anlaşılabilir.

3.JONES POLİNOMU

1984'te Vaughan Jones tarafından tanımlanmıştır. Her düğüm K 'ye bir polinom

$$V_K(t)$$

atanır.

Reidemeister hareketleri uygulanınca bu polinom değişmez.

Örnek:

$$V_{\text{trefoil}}(t) = t + t^3 - t^4$$

Bu polinom, kuantum topolojisi ve sicim teorisi gibi modern fizik konularında da kullanılır.

4.DÜĞÜMSÜZLÜK POLİNOMU

Soru: Verilen bir düğüm K, ip kesmeden "basit halka" ya dönüştürülebilir mi? Bu problem, algoritmik olarak zor (NPzor) kabul edilir. Bilgisayar destekli düğüm teorisi bu sorunu çözmek için kullanılır.

TARİHTE VE SANATTA DÜĞÜM



Osmanlı'da kullanılan kavuk ve sarıklar, düğüm benzeri dolama yapılarıdır. Her kavuk türü; dolama sayısı, yönü ve katman düzeni bakımından özgün bir yapıya sahiptir.

Bu dolama biçimleri yalnızca estetik bir süsleme değil, aynı zamanda rütbe, makam ve aidiyet bilgisini kodlayan yapısal düzenlerdir. Sarıkların katmanlı ve simetrik biçimde sarılması, tekrarlılık, simetri ve düzenli dönüşüm ilkelerine dayanır. Bu yönüyle kavuk ve sarık düğümleri, düğüm teorisinde yer alan topolojik biçim, simetrik yapı ve eşdeğerlik kavramlarını çağrıştıran tarihsel örnekler olarak değerlendirilebilir.



Batı sanatında da benzer biçimde, Kelt düğümleri olarak bilinen süsleme desenleri vardır. Bu desenler, uçları olmayan kapalı halkalar şeklinde birbirine dolanır. Orta Çağ el yazmalarında, taş oymalarda ve takılarda sıkça görülür. Bu düğümler, yaşam döngüsü ve sonsuzluk anlamlarını taşır.



Orta Asya Türk kültüründe yaygın olarak kullanılan Gördes düğümü, halıcılıkta sağlamlığıyla öne çıkan temel bir düğüm türüdür. Bu düğüm, iki iplik üzerine simetrik biçimde atılarak çift bağlanma yapısı oluşturur. Matematiksel olarak Gördes düğümü, iki yönlü simetriye sahip bağlar şeklinde modellenenebilir. Halı ve kilimlerde kullanılan bu çift düğüm yapısı, denge, tekrarlılık ve yapısal dayanıklılık ilkelerini birlikte sağlar. Bu özellikleriyle Gördes düğümü, geleneksel el sanatlarında matematiksel düzenin somut bir örneği olarak değerlendirilebilir.



UYGULAMA ALANLARI

Biyoloji:DNA ve protein zincirlerinin yapısı düğüm benzeri biçimler alır. DNA'nın çoğalması sırasında oluşan düğümler, topoizomerez adı verilen enzimler tarafından çözülür.



Kimya: Bazı moleküller düğüm benzeri biçimlerde bağlanır. Bu yapıların kararlılığını ve özelliklerini anlamak için düğüm teorisi kullanılır.

Fizik: Kuantum alan teorisinde "kuantum düğümleri" kavramı ortaya çıkar.Ayrıca sicim teorisinde temel parçacıklar, uzayda titreşen iplikçikler (stringler) olarak modellenir; bu da düğüm topolojisiyle yakından ilişkilidir.



Bilgisayar Bilimi: 3B modelleme, robotik kolların hareket planlaması ve veri görselleştirme gibi alanlarda düğüm çözme algoritmaları kullanılır.

GERÇEK HAYATTAN ÖRNEKLER

Trefoil Düğümleri: En basit düğüm örneğidir; hem matematikte hem de sanat eserlerinde sıkça görülür. Denizcilik Düğümleri: Gemicilikte kullanılan birçok düğüm (örneğin sekizli düğüm) düğüm teorisinin pratik örnekleridir. DNA Düğümleri: Hücre içi DNA zincirleri bazen birbirine dolanır; doğadaki enzimler bu düğümleri çözerek canlılığın devamını sağlar. Sanatta Düğüm Formları: Kelt sanatı, halı motifleri ve modern heykellerde düğüm desenleri estetik bir unsur olarak kullanılır.



KAYNAKÇA

https://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory
<https://mathworld.wolfram.com/KnotTheory.html>
<https://bilimgenc.tubitak.gov.tr/>
<https://www.topologyatlas.net/>
https://www.youtube.com/watch?v=20qdG_Shkvq
<https://www.youtube.com/watch?v=P-WYeQ3SH7g>
ChatGpt