

# DÖRT RENK TEOREMİ

DANIŞMAN: Doç. Dr. Yasemin SOYLU  
Göksu GENÇOĞLU

## GİRİŞ

Dört Renk Teoremi, düzlemde çizilmiş herhangi bir haritanın, birbirine komşu (yani ortak bir sınır parçası paylaşan) bölgeler aynı renge boyanmayacak şekilde, en fazla dört farklı renk kullanılarak renklendirilebileceğini ifade eder. Bu teorem, grafik kuramı bağlamında daha soyut bir biçimde şu şekilde formüle edilir: Her düzlemsel grafın kromatik sayısı en fazla 4'tür. Burada kromatik sayı, bir grafın ardışık (komşu) köşelerinin aynı renge boyanmaması koşuluyla gerekli olan en az renk sayısını belirtir.



## BAŞLANGIÇ VE İLK İSPAT DENEMELERİ

Dört Renk Probleminin ortaya çıkışı, 1852 yılında Francis Guthrie'nin bir haritayı renklendirirken fark ettiği gözleme dayanır. Guthrie'nin erkek kardeşi, aynı dönemde ünlü İngiliz matematikçi Augustus De Morgan'ın öğrencisi olup soruyu hocasına iletmıştır. De Morgan, soruyu ilgi çekici bulmasına karşın çözüm üretememiştir. Bu durum, problemin kısa süre içinde matematik çevrelerinde hızla yayılmasına ve dönemin matematikçileri arasında önemli bir araştırma alanı hâline gelmesine yol açmıştır. Problemin çözümüne yönelik ilk ciddi ve sistemli girişimler yaklaşık otuz yıl sonra görülmeye başlanmıştır. Arthur Cayley, Alfred Bray Kempe gibi dönemin önde gelen matematikçileri problem üzerinde yoğun şekilde çalışmış, ancak sundukları çözüm girişimleri daha sonra hatalı oldukları gerekçesiyle geçersiz kılınmıştır. Bu başarısız girişimler, matematiksel yöntemlerin gelişmesine ve problemle ilişkili yeni teoremlerin ortaya çıkmasına önemli katkılar sağlamıştır. Özellikle Kempe'nin sunduğu ispatın hatalarını ortaya koyan Percy John Heawood, aynı çalışmasında her düzlemsel haritanın beş renk kullanılarak mutlaka renklendirilebileceğini ispatlamayı başarmıştır. Böylece "Beş Renk Teoremi" literatüre kesin bir sonuç olarak girmiştir. Bununla birlikte, dört renk gerektiren özel durumların varlığı henüz doğrulanamadığından, Dört Renk Problemi uzun yıllar boyunca çözülmemiş bir matematiksel bilmecenin varlığını korumaya devam etmiştir. Bu süreç, yalnızca teoreme giden yolu şekillendirmekle kalmamış, aynı zamanda modern grafik kuramının, kombinatorik düşüncenin ve matematiksel ispat tekniklerinin gelişiminde önemli bir kilometre taşı olmuştur.

## BİLGİSAYAR ÇAĞI VE NİHAİ KANIT

Soruya uzun yıllar boyunca bir çözüm getirilememiş olsa da, ilerleyen dönemlerde çözüm sürecinde belirleyici bir araç hâline gelecek olan bilgisayar teknolojisi aynı zaman diliminde ortaya çıkmış ve hızlı bir gelişim göstermeye başlamıştır. 1960'lara gelindiğinde, ilk nesil vakum tüplü bilgisayarların yerini daha güvenilir, daha küçük ve çok daha hızlı çalışan transistörlü bilgisayarlar almaya başlamıştı. Bu dönüşüm, hesaplama kapasitesinde kayda değer bir sıçramaya yol açarak, karmaşık matematiksel problemlerin bilgisayar destekli yöntemlerle ele alınabilmesini mümkün kılmıştır.



1970'li yıllara gelindiğinde, University of Illinois'den matematikçiler Kenneth Appel ve Wolfgang Haken, Dört Renk Problemi üzerine yürüttükleri araştırmaları yoğun biçimde sürdürmekteydi. Ekip, problemin çözümüne yönelik yenilikçi bir yaklaşım geliştirerek, düzlemsel haritaların sahip olabileceği tüm olası yapıların kapsamlı bir şekilde incelenmesi gerektiğini ortaya koydu. Bu doğrultuda, 1700'ü aşkın kritik harita konfigürasyonunu tanımladılar ve bunların her birini dönemin en gelişmiş bilgisayarlarından biri olan IBM 370 üzerinde sistematik olarak test ettiler.



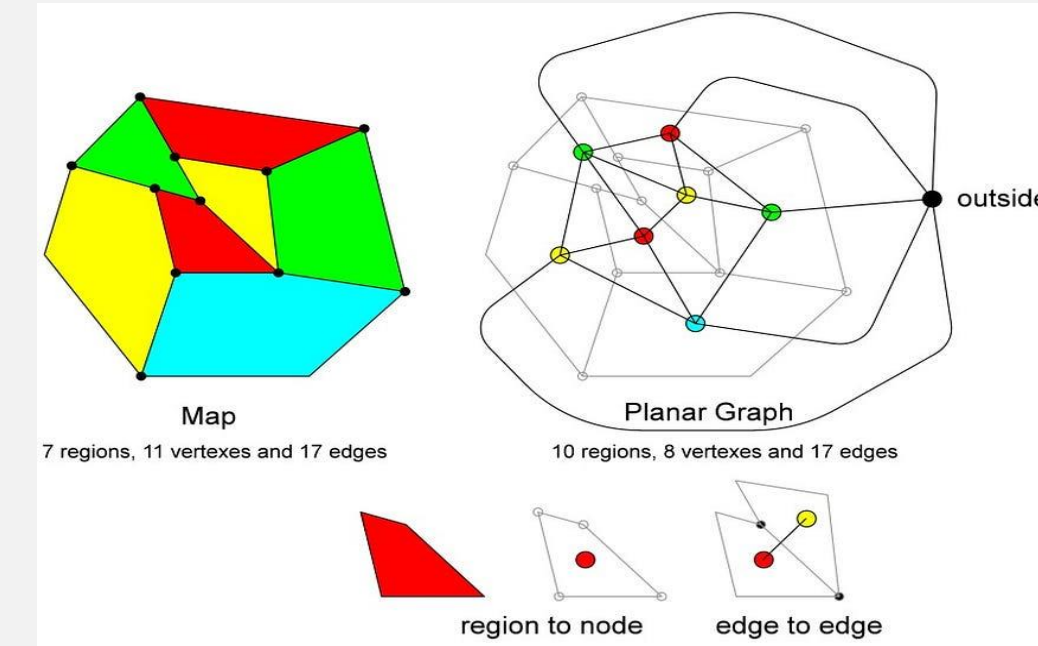
Bu işlem, bilgisayar tarafından yaklaşık 50 gün boyunca kesintisiz olarak yürütüldü. Sürecin sonunda Appel ve Haken'ın yaklaşımı başarılı oldu: Tüm konfigürasyonların dört renkle boyanabilir olduğu doğrulandı. Böylece hem yüzyılı aşkın süredir çözülmemeyen bir matematiksel problem nihayete erdirildi, hem de matematik tarihinde bilgisayar destekli ispatın ilk büyük ölçekli örneklerinden biri verilmiş oldu. Bu çalışma, modern matematiksel ispat anlayışında önemli bir dönüm noktası olarak kabul edilmektedir.

## GRAF TEORİSİ VE BAĞLANTISI

Her düzlemsel grafın düğümleri, komşu düğümlerin aynı renkte olmaması koşuluyla, en fazla 4 renkle boyanabilir.

### Grafın Temel Matematiksel Gösterimi :

Bir graf matematiksel olarak  $G = (V, E)$  biçiminde tanımlanır; burada  $V$  düğüm kümesini,  $E$  ise düğümler arasındaki kenarları ifade eder. Örneğin bir haritada beş bölge bulunuyorsa bu bölgeler  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  şeklinde gösterilir. Eğer  $v_1$  ve  $v_2$  bölgeleri komşuysa bu durum graf üzerinde  $(v_1, v_2) \in E$  olarak belirtilir. Harita renklendirme problemi, graf renklendirme problemine dönüştürülerek incelenir. Renklendirme işlemi her düğüme bir renk atayan  $c: V \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  fonksiyonu ile ifade edilir. Bu fonksiyon, komşu düğümlere aynı rengin verilmesini yasaklar; yani  $(v_i, v_j) \in E \Rightarrow c(v_i) \neq c(v_j)$  koşulu sağlanmalıdır. Dört Renk Teoremi ise her düzlemsel grafın, bu koşulları sağlayacak şekilde en fazla dört renkle renklendirilebileceğini söyler ve bunu grafın kromatik sayısı üzerinden  $\chi(G) \leq 4$  şeklinde ifade eder.



### Euler Formülü ve Düzlemsel Grafların Sınırları

Bir düzlemsel graf için Euler formülü  $V - E + F = 2$

şeklinde. Burada  $V$  düğüm sayısını,  $E$  kenar sayısını,  $F$  ise yüz (bölge) sayısını temsil eder. Bu temel ilişki, düzlemsel grafların yapısal olarak ne kadar karmaşık olabileceğine güçlü sınırlamalar getirir. Düzlemsel graflarda her yüz en az üç kenarla çevrili olduğundan

$$3F \leq 2E$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu ifade Euler formülüyle birlikte kullanıldığında kenar sayısı için klasik üst sınır elde edilir:

$$E \leq 3V - 6$$

Bu sonuç, düzlemsel grafların aşırı yoğun bağlantılara sahip olamayacağını gösterir ve renklendirme problemlerinin karmaşıklığını önemli ölçüde sınırlar.

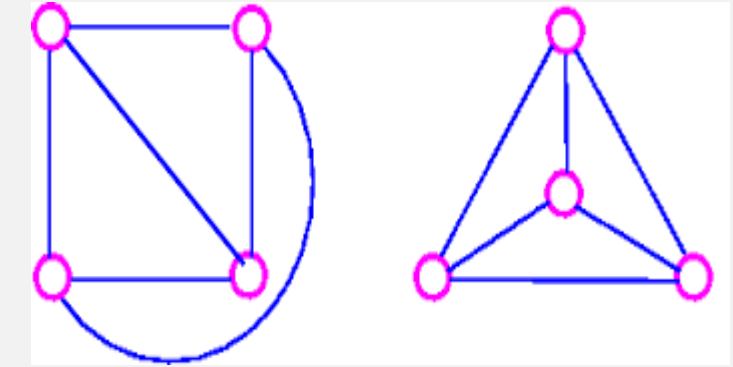
Ayrıca toplam derece formülü

$$\sum \text{dereceler} = 2E \leq 6V - 12$$

olduğundan, ortalama derece

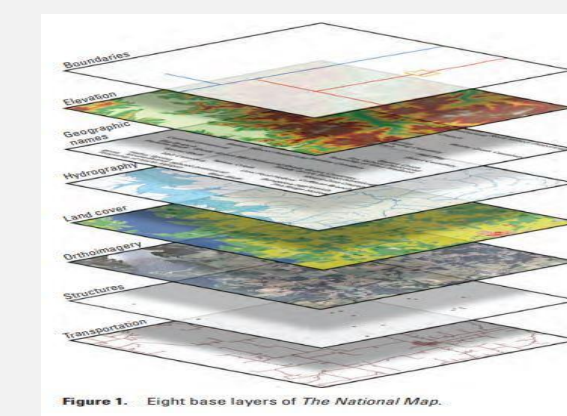
$$\frac{2E}{V} < 6$$

şeklinde. Bu da düzlemsel graflarda çok yüksek dereceye sahip düğümlerin yoğun şekilde bulunamayacağını ortaya koyar. Bu sınırlama, dört renk teoremine yönelik ispatlarda temel rol oynar; çünkü düğümlerin derecesi arttıkça renklendirme probleminin zorluk derecesi de artar.

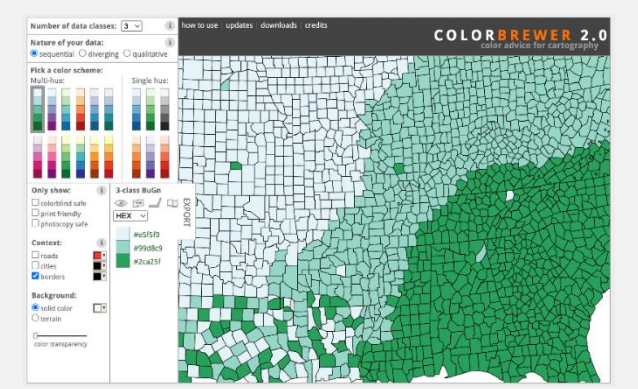


Bu görsel, bir düzlemsel grafın düğümlerini (V), kenarlarını (E) ve yüzlerini (F) açık şekilde gösteren bir diyagramdır. Grafın düzlemde kesişmeyen kenarlarla çizildiğini ve Euler formülünün  $(V - E + F = 2)$  nasıl uygulanabileceğini görsel olarak anlatır.

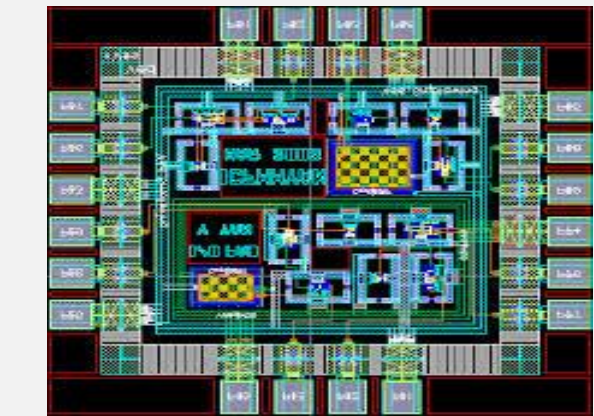
## KULLANIM ALANLARI



Coğrafi Bilgi Sistemleri ve Harita Üretiminde



Veri Sınıflandırma ve Görselleştirmede



Devre Tasarımı ve Çip Yerleşiminde

## KAYNAKÇA

<https://hibrahimakkaya.medium.com/d%C3%B6rt-renk-teoremi-4479b0ddcb6d>  
[https://tr.wikipedia.org/wiki/D%C3%B6rt\\_renk\\_teoremi](https://tr.wikipedia.org/wiki/D%C3%B6rt_renk_teoremi)  
[https://www.usgs.gov/media/images/8-base-layers-national-map?utm\\_source=chatgpt.com](https://www.usgs.gov/media/images/8-base-layers-national-map?utm_source=chatgpt.com)  
<https://colorbrewer2.org/>  
 Weste, N. H. E., & Harris, D. (2020). *CMOS VLSI design: A circuits and systems perspective* (4th ed.). Pearson.  
 Chatgpt