

GİRİŞ

Dirichlet (1805-1859) Alman asıllı önemli bir matematikçidir. Sayı teorisi, analiz ve matematiksel fizik alanlarında büyük katkılar yapmıştır. En çok, aritmetik dizilerde asal sayıların açıklayan Dirichlet



teoremi ile tanınır. Ayrıca Fourier serileri, Dirichlet karakterleri ve Dirichlet ilkesi onun adını taşıyacak kavramlardır. Berlin ve Göttingen üniversitelerinde ders vermiştir, Riemann gibi büyük matematikçileri etkilemiştir. Modern analiz ve sayı teorisinin temellerinin atılmasında önemli rol oynamıştır. Çalışmaları, günümüz matematiğinin yapı taşları arasında yer almaktadır.

TEMEL TANIMLAR

Tanım: Sayma sayılar kümesi $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ 'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'ye giden bir fonksiyona aritmetik fonksiyon denir.

Tanım: Eğer bir f aritmetik fonksiyonu, aralarında asal her $n, m \in \mathbb{S}$ sayısı çifti için

$$f(n)f(m) = f(nm)$$

eşitliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna çarpımsaldır denir.

Çarpımsal fonksiyonlara örnek verelim:

1. **Sıfır fonksiyonu:** Her $n \in \mathbb{S}$ için $f(n) = 0$ eşitliğiyle tanımlanmış sabit 0 fonksiyonu çarpımsal fonksiyondur. Sabit 0 fonksiyonu $f(1)$ 'in 1'e eşit olmadığı tek çarpımsal fonksiyondur.

2. **ℓ fonksiyonu:**

$$\ell(n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ℓ fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur.

3. **I_r Güç fonksiyonu:** Herhangi bir r gerçel sayısı için I_r güç fonksiyonu $I_r(n) = n^r$ şeklinde tanımlı olup çarpımsal bir fonksiyondur.

4. **λ fonksiyonu:** p_i 'ler n 'nin asal çarpanları olmak üzere $n = p_1 p_2 \dots p_k$ olsun. Bu durumda $\lambda(n) = (-1)^k$ ile tanımlı fonksiyona λ fonksiyonu denir. λ bir sayının asal bölenlerinin tek sayıda mı yoksa çift sayıda mı olduğunu belirtir.

5. **Euler ϕ fonksiyonu:** Bu fonksiyon

$$\phi(n) = |\{x \in \mathbb{N} : \text{ebob}(x, n) = 1, x \leq n\}|$$

şeklinde tanımlı olup çarpımsal bir fonksiyondur.

6. **Bölen sayı fonksiyonu:** $d(n) = |\{d \in \mathbb{N} : d|n\}|$ olarak tanımlı fonksiyona bölen sayı fonksiyonu çarpımsaldır. Burada $d|n$ ile n sayısının d bölenleri gösterilmektedir.

7. **Möbius μ fonksiyonu:**

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n, 1 \text{ dışında bir tamkareye bölünüyorsa} \\ (-1)^t & \text{eğer } n, t \text{ değişik asalin çarpımıysa} \end{cases}$$

8. **σ_r Fonksiyonu:** r herhangi bir gerçel sayısı olsun.

$$\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu çarpımsaldır.

Möbius Ters Çevirme Formülü(1)

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f^*\left(\frac{n}{d}\right)$$

şeklinde tanımlı ifadeye Möbius ters çevirme formülü denir. Bu formülde f^* ;

$$f^* = \sum_{d|n} f(d)$$

şeklinde tanımlıdır.

Fonksiyonların Toplam ve Çarpımı: f ve g iki aritmetik fonksiyon olsun. Bu durumda $f + g$ ve $f \cdot g$ fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlarız:

- i. $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$
- ii. $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$

Dirichlet Çarpımı: f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere bunların Dirichlet Çarpımı;

$$(f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{dd'=n} f(d) g(d')$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek

$$(f \times g)(15) = f(1) \cdot g(15) + f(3)g(5) + f(5)g(3) + f(15)g(1) \\ = 1.4 + 2.2 + 4.2 + 8.1 = 24$$

Möbius Ters Çevirme Formülü(2).

$$f = \mu \times f^*$$

f^* fonksiyonu da Dirichlet çarpımıyla f' den tanımlanabilir.

$$f^*(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(d) \cdot 1 \\ = \sum_{d|n} f(d) \cdot I_0\left(\frac{n}{d}\right) = (f \times I_0)(n) \\ f^* = f \times I_0$$

DİRİCHLET ÇARPIMI'NIN ÖZELLİKLERİ

1. **Çarpımsallığın Korunması:** f ve g çarpımsal fonksiyon olsun. O halde $f \times g$ Dirichlet çarpımsal fonksiyondur.
2. **Değişmellilik:** Her f, g aritmetik fonksiyonu için, $f \times g = g \times f$.
3. **Birleşmellilik:** Her f, g, h aritmetik fonksiyonu için, $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$
4. **Etkisiz Eleman:** ℓ fonksiyonunu $\ell(1) = 1$ ve 1'den büyük tüm n doğal sayıları için $\ell(n) = 0$ olarak tanımlayalım. Her f aritmetik fonksiyonu için , $f \times \ell = \ell \times f = f$
5. **Tersinir Eleman:** Bir f fonksiyonunun tersinir olması demek $f \times g = \ell$ eşitliğini sağlayan bir g fonksiyonunun olmasıdır
6. **Çarpımsal Fonksiyonların Tersinir Elemanları:** Çarpımsal fonksiyonlarda $f(1) = 1 \neq 0$ olduğunda tüm çarpımsal fonksiyonların Dirichlet tersleri vardır.

Teorem. Çarpımsal fonksiyonlar kümesi,

$$(f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{dd'=n} f(d) g(d')$$

kurallarıyla tanımlanan $\times$ işlemi altında değişmeli (komütatif, abelyen) bir grup oluştururlar. Yani

1. Her f, g çarpımsal fonksiyonları için, $f \times g$ de çarpımsal aritmetik bir fonksiyondur.

2. Her f, g, h çarpımsal fonksiyonları için, $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$

3. Eğer ℓ fonksiyonu, $\ell(n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n > 1 \text{ ise} \end{cases}$

ℓ çarpımsal bir fonksiyondur ve $\times$ işleminin etkisiz elemanıdır, yani

$$f \times \ell = \ell \times f = f$$

4. Eğer f çarpımsal fonksiyonsa $g(1) = 1$ ve $n > 1$, için $f \times g = g \times f = \ell$
5. Her f, g çarpımsal aritmetik fonksiyonu için $f \times g = g \times f$

DİRİCHLET ÇARPIMI'NIN KULLANILDIĞI

YERLER

1. **Sayılar Teorisi.**
 - Asal sayıların dağılımı
 - Aritmetik diziler
 - Dirichlet karakterleri ve L-fonksiyonları
2. Çarpımsal fonksiyonlar
3. Dirichlet serileri ve Riemann zeta fonksiyonu
4. Analitik sayılar teorisi

KAYNAKÇA

1. Matematik Dünyası 2005 Bahar
2. Blackwell, David; MacQueen, James B. (1973). "Ferguson distributions via Polya urn schemes". *Ann. Stat.* 1 (2): 353–355
3. S. Kotz; N. Balakrishnan; N. L. Johnson (2000). *Continuous Multivariate Distributions. Volume 1: Models and Applications*. New York: Wiley.