

GİRİŞ



Tropikal geometri, kökleri 1980'lere dayanan çok genç bir matematik alanıdır. Temeli, Brezilyalı bilgisayar bilimci Imre Simon'un otomata teorisi ve minimizasyon problemlerini incelerken geliştirdiği min-plus aritmetiğine dayanır.

Bu aritmetiğe, Simon'un Brezilyalı oluşuna esprili bir gönderme olarak zamanla "tropikal" adı verildi. 1990'ların sonunda ve 2000'lerin başında, bu fikirler cebirsel geometriye taşındı.

Özellikle Mikhail Kapranov, Grigory Mikhalkin, B. Sturmfels ve A.Zelevinsky gibi araştırmacılar, tropikal yöntemlerin polinomların davranışlarını incelemeye şaşırtıcı derecede güçlü olduğunu gösterdi. 2005'te Mikhalkin'in tropikal eğriler üzerine yaptığı çalışmalar, alanın hızla gelişmesini sağladı.

Tropikal eğrilerin klasik cebirsel eğrileri "parçalı doğrusal" bir biçimde temsil edebildiği ortaya çıkınca, matematikte yeni bir köprü kuruldu. Akıllara şu soru gelmeye başladı: Matematikte toplama "min", çarpma ise "toplama" olsaydı ne olurdu?

Denklemler keskin köşeli şekillere, eğriler ise kırık çizgilere dönüştü. İşte tropikal geometri, tam da böyle bir evrenin kapısını araladı.

Tropikal geometri klasik cebirsel eğrilerin sade, parçalı doğrusal ve şaşırtıcı derecede düzenli bir versiyonu haline geldi. Bu yeni geometri;

- ✓ karmaşık polinomları anlaşılır yapılara dönüştürür,
- ✓ ağları, yolları ve optimizasyonu tek bir çatı altında toplar,
- ✓ matematiğin soyut dünyasını tropikal bir basitlikle yeniden yorumlar.

Tropikal geometri; modern matematiğin en genç, en yaratıcı ve en hızlı büyüyen alanlarından biri halini aldı. Yolculuğumuz ise "toplama"yı "min"e çevirmek kadar basit bir fikirle başlıyor.

TROPİKAL SAYILAR

Tropikal aritmetik, klasik aritmetikten farklı işlemlerin tanımlandığı özel bir cebirsel yapıdır. Genellikle $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, kümesi üzerinde tanımlanır.

⊕ Tropikal Toplama

Tropikal toplama, klasik toplamın yerine minimum alma işlemidir.

$$a \oplus b = \min(a, b)$$

Örnek: $3 \oplus 7 = 3$

⊗ Tropikal Çarpma

Tropikal çarpma, klasik çarpmanın yerine toplama işlemidir.

$$a \otimes b = a + b$$

Örnek: $3 \otimes 7 = 10$

Tropikal toplama (⊕) ve tropikal çarpma (⊗), klasik cebirdeki karşılıklarıyla benzer yapısal özelliklere sahiptir. Bu bölümde bu işlemlerin temel cebirsel özellikleri özetlenmektedir:

1. Değişme Özelliği

Her iki işlem de değişmeli olup, işlem sırası sonucu etkilemez.

$$a \oplus b = b \oplus a \quad a \otimes b = b \otimes a$$

2. Birleşme Özelliği

İşlemlerin gruplandırılması sonucu değiştirmez.

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

3. Dağılım Özelliği

Tropikal çarpma, tropikal toplama üzerine dağılır. Bu özellik yarı-halkaların temel koşullarından biridir.

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

4. Birim Eleman

Her iki işlem için de birim eleman mevcuttur.

Tropikal toplama birim elemanı: $+\infty$ dur. Çünkü;

$$a \oplus (+\infty) = \min(a, +\infty) = a$$

dır. Tropikal çarpma birim elemanı: **0** dir. Çünkü;

$$a \otimes 0 = a + 0 = a$$

dır. Bu özellikler bir araya geldiğinde $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ yapısı bir yarı-halka (semiring) oluşturur. Bunun nedeni şudur: Dağılım, birleşme, değişme özellikleri sağlanır. Her iki işlem için birim eleman vardır. Ancak tropikal toplamının ters elemanı yoktur. Örneğin klasik cebirde

$$a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

şeklinde bir toplamsal ters bulunabilirken tropikal toplamada

$$a \oplus b = \min(a, b) = +\infty$$

eşitliğini sağlayan bir b sayısı yoktur. Dolayısıyla toplamsal ters bulunmadığından yapı bir halka değil, yarı-halkadır.

Tropikal yarı-halkalar, özellikle optimizasyon, graf teorisi, kısa yol problemleri, nokta konfigürasyonları ve tropikal geometri gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır.

Tropikal Bölme Neden Tanımlı Değildir?

Klasik aritmetikte çarpmanın tersi olan bölme şu şekilde tanımlıdır.

$$a \times b = c \Rightarrow c / b = a$$

Tropikal aritmetikte çarpma $a \otimes b = a + b$ şeklindedir. Bu durumda "bölme" ters işlem olarak çıkarma gerektirir: $c \oslash b = c - b$ Ancak tropikal aritmetikte çıkarma işlemi tanımlı değildir, çünkü toplamının (⊕) ters elemanı yoktur. Örneğin: $a + x = 0$ eşitliğini sağlayan herhangi bir gerçek sayı olan x yoktur. Bu nedenle tropikal çarpmanın genel bir ters işlemi tanımlanamaz olduğundan tropikal bölme işlemi mevcut değildir.

TROPİKAL POLİNOMLAR

Bir değişkenli tropikal polinom

$P(x) = \min\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n\}$ şeklinde tanımlanır.

Burada $a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sayıları

tropikal katsayılardır ve kx

ifadesi, tropikal aritmetikte

çarpmanın klasik karşılığı

yerine toplamayı temsil eder.

Dolayısıyla $a_k + kx$ her bir

terimin tropikal anlamda

"monom" karşılığıdır. Klasik

polinomların grafiği düzgün

eğriler oluştururken, tropikal

polinomların grafiği parçalı

doğrusal bir yapı sergiler.

Her bir terim $a_k + kx$ grafikte bir doğruya karşılık gelir. Tropikal

polinomun grafiği ise bu doğruların alt zarfıdır; yani her x için

polinomun değeri doğruların en küçüğünün seçilmesiyle

belirlenir. Örneğin klasik gösterime benzeyen tropikal polinom:

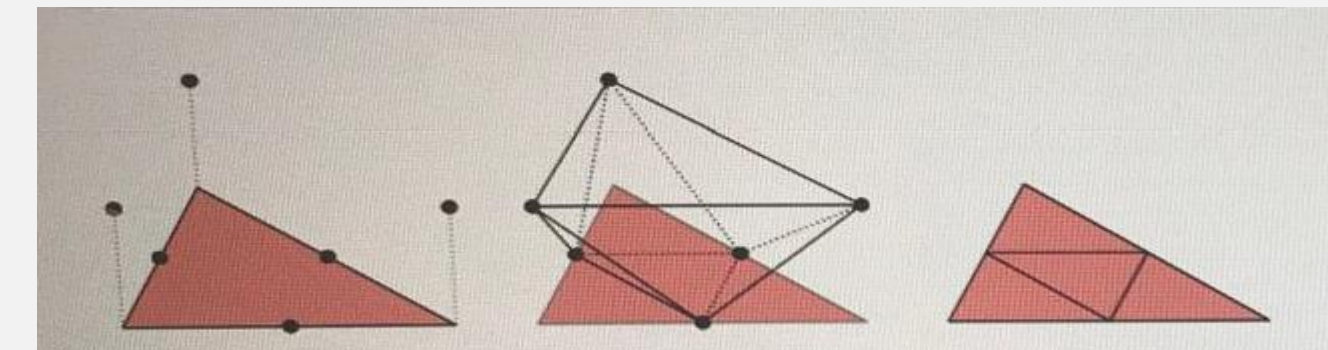
$$P(x) = 3 \oplus (1 \otimes x) \oplus (2 \otimes 2x),$$

tropikal işlemler kullanılarak

$$P(x) = \min(3, 1+x, 2+2x)$$

şeklini alır. Bu ifade, üç farklı doğrunun alt zarfını tanımlar ve grafiği bu doğrular arasında en küçük olanın oluşturduğu kırıklı doğrusal bir yapıya dönüştürür.

NEWTON POLİGONU



Bir polinomdaki her terim, üslerinden oluşan bir koordinat noktasına karşılık gelir. Bu noktaların tümünü düzlemde işaretlediğinizde bir nokta kümesi elde ederiz.

Newton poligonu, bu noktaların hepsini kapsayan en küçük dışbükey (konveks) çokgendir.

Newton poligonunun köşelerinden çizilen bir tür "dual grafik" ile

elde edilen çizgilere ise tropikal eğri denir. Özellikle p-adik

analiz, tropikal geometri ve polinom köklerinin büyüklüklerinin

incelenmesi gibi alanlarda temel bir araçtır. Verilen bir polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

için Newton poligonu, her terim için $(k, v(a_k))$ noktasının oluşturulmasıyla elde edilir.

Burada $v(a_k)$ katsayısına uygulanan değerlendirme

fonksiyonunun çıktısını belirtir. Aşağıdaki polinomu ele alalım:

$$P(x) = 3 + 2x + 5x^2 + x^3$$

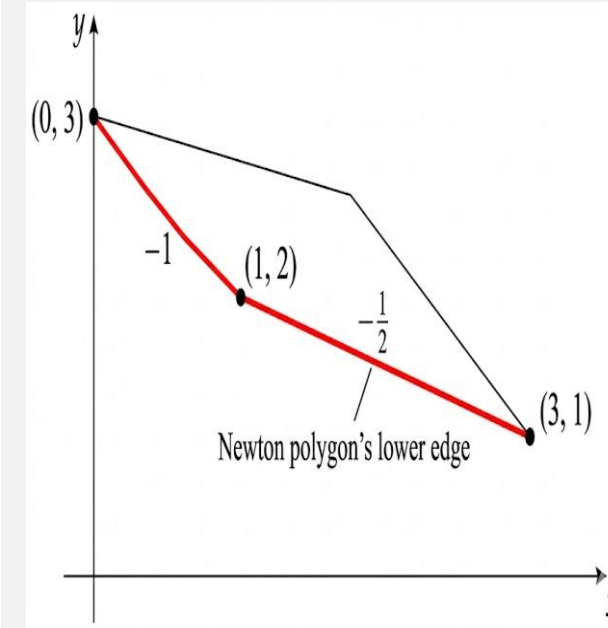
Katsayılar: $a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 1$

Basitlik için $v(a_k) = a_k$ olarak alalım (yani katsayıları direkt kullanacağız).

Dolayısıyla noktalarımız: (0,3), (1,2), (2,5), (3,1) dur.

Newton poligonu, bu noktaların en dış konveks hattı (convex hull) ile çizilir.

Bu poligonda "alt kenar" önemlidir. Tropikal kökler genellikle bu alt kenarın eğimlerine karşılık gelir.



Noktaları birleştiren konveks dış hat Newton poligonudur.

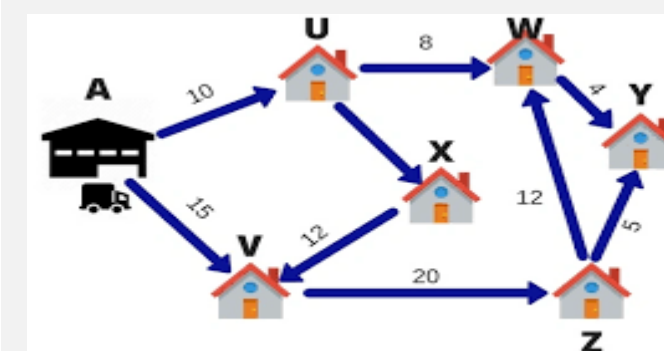
Bu durumda alt kenar, köklerle ilgilidir.

Alt kenar noktaları:

(1,2), (3,1) ve (0,3) dir.

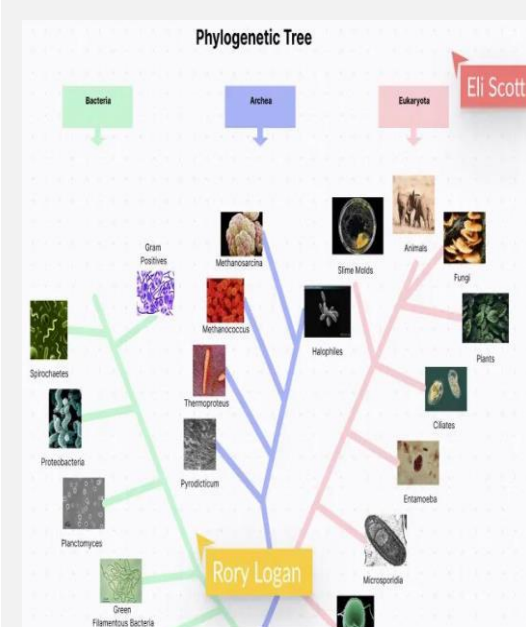
Bu kenarların eğimleri poligonun tropikal kökleri hakkında bilgi verir.

UYGULAMA ALANLARI



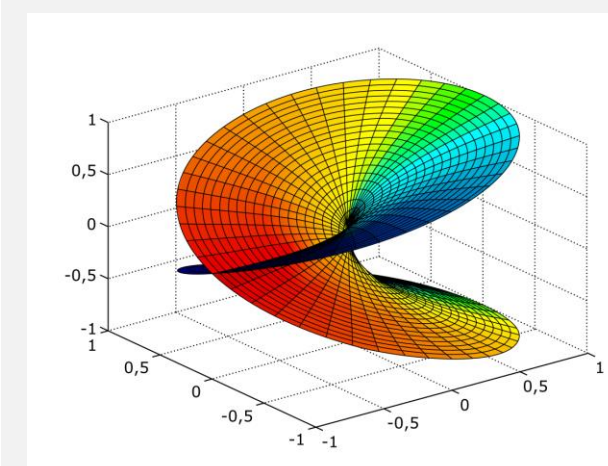
1-Optimizasyon

En Kısa Yol Problemlerini çözerken aslında tropikal geometriyi kullanmaktayız. Aynı zamanda Tropikal cebirin en tipik uygulamasıdır.



2-Biyoenformatik

Büyük ve karmaşık veri kümelerine anlam kazandırmak için bilgisayar bilimi ve biyolojinin unsurlarını birleştiren yeni ve çeşitli bir alandır. Tropikal geometri, büyük genomik veri kümelerinde ağaç yapılarının rekonstrüksiyonu, alternatif evrim modellerinin karşılaştırılması ve hesaplamalı filogenetikte optimizasyon problemlerinin çözülmesi gibi süreçlere teorik ve pratik katkılar sağlar.



3.Cebirsel geometri

Cebirsel geometri, polinom denklemleriyle tanımlanan ifadelerin yapısal ve geometrik özelliklerini inceleyen temel bir matematik alanıdır. Tropikal geometri, klasik denklemlerin parçalı doğrusal limit modellerini elde etmeye imkân vererek eğrilerin ve yüzeylerin limit davranışlarının sistematik biçimde analiz edilmesini sağlar.

KAYNAKÇA

- First Expedition to Tropical Geometry Johannes Rau April 1, 2017
- <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2017/02/introductory-guide-on-linear-programming-explained-in-simple-english/>
- <https://creately.com/tr/lp/filogenetik-a%C4%9Fa%C3%A7-yap%C4%B1c%C4%B1/>
- <https://youtu.be/PkM502ZKrJw?si=9VDjAGZ3JuXhPQLh>
- ChatGP
- <https://share.google/images/1qN6Xi5KW9tqJhlvO>