

GİRİŞ

Nüfus modelleri, bir popülasyonun zaman içindeki değişimini tanımlamak ve bu değişimi etkileyen biyolojik ile çevresel faktörleri incelemek için kullanılan diferansiyel denklem temelli matematiksel araçlardır. Bu modeller, canlıların çoğalma hızlarını, çevresel kısıtlamaları, kaynak sınırlarını ve türler arası etkileşimleri sistematik bir çerçevede açıklamaya imkan sağlar. Bu çalışma kapsamında ele alınan üstel büyüme, lojistik büyüme, Lotka-Volterra av-avcı modeli ve birleşik model popülasyon değişiminin temel matematiksel modellerini oluşturur. Bu dört model, gerçek hayattaki nüfus davranışlarını anlamada ve geleceğe yönelik tahminlerde bulunmada önemli bir yere sahiptir.

ÜSTEL BÜYÜME MODELİ

MODELİN TEMELİ:

Bir popülasyonun büyüme hızı, mevcut nüfus miktarı ile orantılıdır. Bu durumda nüfus değişimini modelleyen diferansiyel denklem

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N$$

şeklinde. Burada $N(t)$, t anındaki nüfus miktarını ve r , büyüme oranını ifade eder. Bu denklemin çözümü N_0 =başlangıç nüfusu için

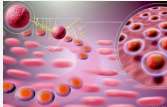
$$N(t) = N_0 e^{\alpha t}$$

şeklinde. Eğer;
 $\alpha > 0$: nüfus hızla artar (α =orsansal (bağıl) büyüme hızı)
 $\alpha < 0$: nüfus hızla azalır.

Üstel modelde kaynaklar sınırsız kabul edilir, bu nedenle gerçek hayatta genellikle kısa dönem için geçerlidir. Bakteri kültürleri, başlangıçtaki hızlı çoğalma döneminde üstel modele iyi uyabilir ama uzun vadede kaynaklar sınırlı olduğu için lojistik modelden benzer davranışa geçer.

KULLANIM ALANLARI:

- Bakteri ve mikroorganizma çoğalması
- Hızlı yayılım gösteren hastalıklar
- Nükleer zincir reaksiyonları



LOJİSTİK MODEL

MODELİN TEMELİ:

Gerçek dünyada kaynaklar sınırlıdır. Bu yüzden nüfus artışı belli bir kapasiteye doğru yavaşlar. Bu durumda nüfus değişimini modelleyen diferansiyel denklem

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

şeklinde olur. Burada; K taşıma kapasitesi ve α üreme oranını ifade eder. Çözüm

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-\alpha t}} \quad (c = \text{integrasyon sabiti})$$

şeklinde.



$N \ll K$ iken büyüme üstel büyüme model halini alır. Uzun vadede nüfus K seviyesinde dengelenir.

KULLANIM ALANLARI:

- Ekonomik büyüme ve Pazar doyumu
- Tarım ve biyolojik üretim modelleri
- Sosyolojik ve teknolojik yayılım analizi

LOTKA-VOLTERRA MODELİ

MODELİN TEMELİ:

Bir bölgedeki av-avcı ilişkisini veren bu temel model

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N F, \quad \frac{dF}{dt} = \delta N F - \gamma F$$

diferansiyel denklem sistemi ile verilir. Burada;

- $N(t)$: av popülasyonu
- $F(t)$: avcı popülasyonu
- α : avların doğal üreme oranı
- β : avcılarının avları yok etme oranı
- γ : avcılarının doğal ölüm oranı
- δ : avların avcıya dönüşme oranı



Bu model doğal ekosistemlerde görülen döngüleri çok iyi açıklar.

Faz düzlem ve salınımda model, kapalı yörüngeler oluşturan karakteristik eğriler üretir. Problemin analitik çözümünün açık bir ifadesi olmayıp kapalı fonksiyonlar cinsinden verilir. Bu yüzden yaklaşık çözümler sayısal analiz yöntemleri ile elde edilir.

KULLANIM ALANLARI:

- Ekosistem analizi ve tür etkileşimleri
- Balıkçılık ve deniz ekosistemleri yönetimi
- Tarım zararları ve biyolojik mücadele

BİRLEŞİK MODEL (LOJİSTİK+LV)

MODELİN TEMELİ:

Klasik Lotka -Volterra modeline taşıma kapasitesinin eklenmesi ile daha gerçekçi sonuçlar veren bu model

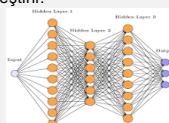
$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad \frac{dF}{dt} = \delta N F - \gamma F$$

diferansiyel denklem sistemi ile verilir. Burada parametreler diğer modeldeki gibi tanımlı olup K taşıma kapasitesi parametresidir.

Bu model tek başına lojistik modelin açıklayamadığı tür etkileşimlerini ve tek başına Lotka -Volterra'nın göz ardı ettiği çevresel sınırlamaları aynı çerçevede birleştirir.

KULLANIM ALANLARI:

- Yaban hayatı ve popülasyon yönetimi
- Yaban hayatı ve popülasyon yönetimi
- Tarım ve biyolojik zararlı kontrolü



ÖRNEK BİR PROBLEM

Kapadokya'da bir bölgede 2020 yılında 800 tavşan ve 60 tilki olduğu tespit edilmiştir. Bilim insanları aşağıdaki biyolojik gözlemleri yapmıştır:

- Yiyecek ve alan bolken tavşan popülasyonu yılda yaklaşık %80 oranında artmaktadır ($\alpha = 0.8$).
- Bölgenin doğal taşıma kapasitesi yaklaşık 5000'dir ($K = 5000$).
- Bir tilki yılda ortalama bir tavşanın 0.0012'sini yakalamaktadır ($\beta = 0.0012$).
- Yakalanan her tavşanın %0.08'i yeni tilki doğurganlığına dönüşmektedir ($\delta = 0.08$).
- Tavşan olmazsa tilki popülasyonu yılda %40 oranında azalmaktadır ($\gamma = 0.4$).

Bu parametrelerle tavşan ve tilki popülasyonlarının zaman içindeki davranışı nasıldır?

ÜSTEL BÜYÜME MODELİ

Bu modele göre verilen başlangıç koşullarına göre çözüm

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t} = 800 e^{0.8 t}$$

şeklinde.

LOJİSTİK MODELİ

Bu modele göre verilen parametrelere göre çözüm

$$N(t) = \frac{K N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}} = \frac{5000 \times 800}{800 + 4200 e^{-0.8 t}}$$

şeklinde.

LOTKA-VOLTERRA MODELİ

Bu modele göre problemin analitik çözümü

$$0.0008 N + 0.0012 F - 0.4 \ln F = C$$

şeklinde. Analitik çözüm kapalı fonksiyon olduğundan problemin yorumlanabilmesi için Runge-Kutta yöntemi kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilebilir.

t	N	0.8N	-0.0012 N F	dN/dt	0.0008 N F	-0.4F	dF/dt	N(t=0.5)	F(t=0.5)
0.5	800.0	640.0	-57.6	582.4	38.4	-24.0	14.4	1147.66	72.2403
0.5	1147.66	918.13	-99.489	818.641	66.326	-28.8961	37.4299	1626.85	102.539
1.0	1626.85	1301.48	-200.178	1101.3	133.452	-41.0155	92.4368	2237.89	181.189
1.5	2237.89	1790.31	-486.578	1393.73	324.385	-72.4757	251.91	2831.89	411.197
2.0	2831.89	2265.51	-1397.36	868.157	931.572	-164.479	767.093	2794.75	1073.18
2.5	2794.75	2235.8	-3599.13	-1363.33	2399.42	-429.273	1970.15	1580.7	2155.82
3.0	1580.7	1264.56	-4089.23	-2824.68	2726.16	-862.327	1863.83	542.059	2620.28
3.5	542.059	433.647	-1704.42	-1270.77	1136.28	-1048.11	88.1656	181.269	2432.76
4.0	181.269	145.015	-529.181	-384.165	352.787	-973.103	-620.316	70.5802	2883.95
4.5	70.5802	56.4642	-176.503	-120.039	117.668	-833.58	-715.911	33.59	1739.71
5.0	33.59	26.872	-70.1243	-43.2522	46.7495	-695.884	-649.134	19.3628	1438.89

BİRLEŞİK MODEL (LOJİSTİK+LV)

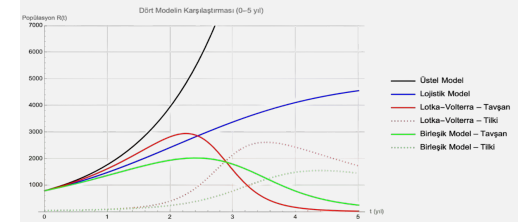
Bu modele göre problemin analitik çözümü

$$\frac{dN}{dt} = 0.8 N \left(1 - \frac{N}{5000}\right) - 0.0012 N F$$

$$\frac{dF}{dt} = 0.0008 N F - 0.4 F$$

şeklinde. Benzer şekilde Runge-Kutta yöntemi sonucu yaklaşık çözümler yan tarafta verilen tablodaki gibidir.

GRAFİKLER



KARŞILAŞTIRMA VE SONUÇ:

- Üstel modele göre nüfus sınırsız şekilde artmaktadır (gerçek dışı).
- Lojistik modele göre nüfus taşıma kapasitesi olan 5000'e yaklaşır fakat geçemez.
- Lotka-Volterra modelinde tavşan nüfusu ile tilki nüfusunun ters şekilde değişimi gözlemlenir.
- Birleşik modelde sınırlar zamanla sönümlenmekte ve elde edilen sonuçlar, doğada gözlemlenen davranışlara en yakın durumu yansıtmaktadır.
- Birleşik modelde büyüme, taşıma kapasitesinin etkisiyle ilerleyen zamanlarda yavaşlama göstermektedir

KAYNAKÇA

- Murray, J.D. Mathematical Biology
- Boyce DiPrima. Elementary Differential Equations
- Hirsch, Smale, Devaney. Differential Equations, Dynamical Systems
- Edelstein-Keshet. Mathematical Models in Biology
- Lotka, A.J.(1925). Elements of Physical Biology. William ve Wilkins.
- Volterra, V.(1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. Nature, 118, 558-560.
- Turchin, P. (2003). Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis. Princeton University Press.