

GİRİŞ

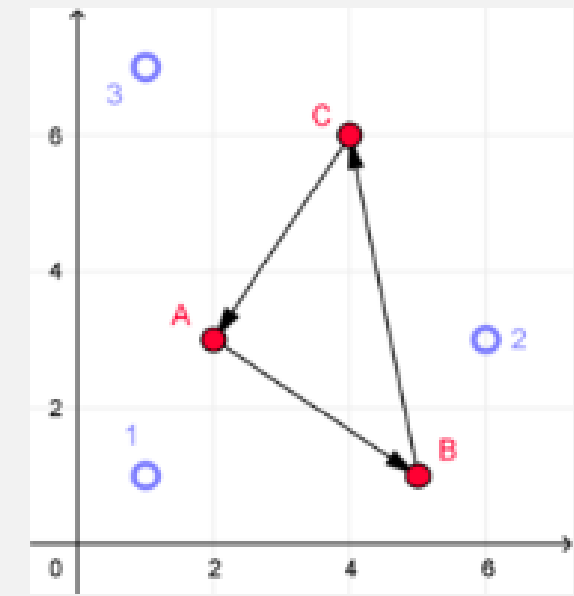
Amerikan matematikçi Kenneth Arrow'dan adını alan **Arrow'un İmkansızlık Teoremi** (Arrow Paradoksu), oylama sistemlerinde dereceli tercihlere dayanan ve üç ya da daha fazla seçenek sunan hiçbir oylama sisteminin belli bir takım mantıklı ölçütleri aynı anda sağlayamayacağını gösterir.

Bu teorem, Kenneth Arrow'un 1972'de **Nobel Ekonomi Ödülü** almasının en büyük nedenlerinden biridir. Arrow, Nobel'i "refah ekonomisine ve sosyal tercih teorisine yaptığı temel katkılar" nedeniyle almıştır. İmkânsızlık Teoremi, modern sosyal seçim teorisinin temeli olarak kabul edilmiştir.



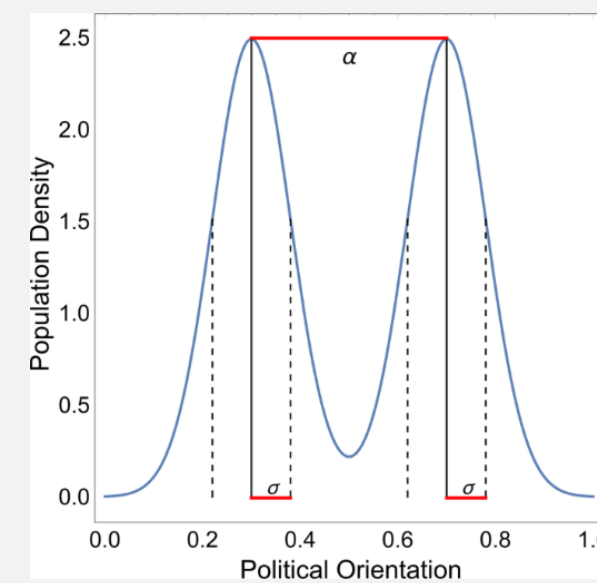
Toplumsal Döngü ve Çelişki:

Bu alternatiflere bakıldığında ortaya çıkan sıralamalar: $A > B$, $B > C$, $C > A$ şeklindedir. Bu $A > B > C > A$ olacak şekilde bir döngü oluşturur.



Geçişlilik Gereği:

Matematiksel olarak $x > y$ ve $y > z$ ise $x > z$ olmalıdır. Fakat burada geçişlilik kuralı ihlal edilmiş olur. Bu ise bir çelişkidir.



ARROW'UN KOŞULLARI

1. Evrensellik (Universal Domain):

- Her birey dilediği tercih sıralamasına sahip olabilir.
- Sistem tüm olası tercih profilleri için çalışmalıdır.
- Hiçbir bireysel sıralama yasaklanmaz. Örneğin; $A > B > C$ veya $C > A > B$ tamamen geçerlidir.
- Buradaki amaç; bu mekanizmanın tüm toplum yapılarında işler hale getirilmesidir.

2. Pareto Etkinliği (Pareto Efficiency):

- Herkes A'yı B'ye tercih ediyorsa toplum da $A > B$ demelidir.
- Oybirliği toplumsal sonuca doğrudan yansımalıdır.
- Azinlık görüşü oybirliği karşısında belirleyici olamaz.
- Buradaki amaç; mantıklı ve toplu rıza ilkesini korumaktır.

3. İlgisiz Seçeneklerden Bağımsızlık (IIA):

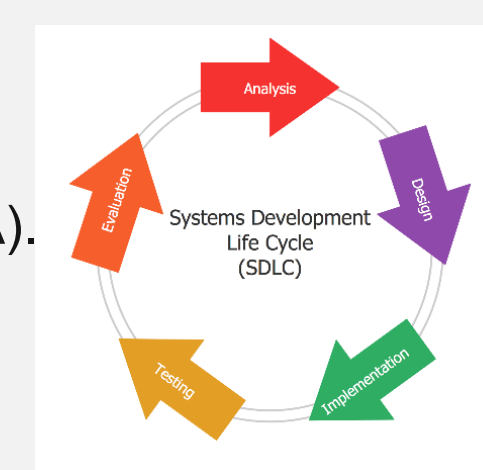
- A-B sonucu, C gibi üçüncü bir seçeneğin varlığından etkilenmemelidir.
- Toplumsal A-B kararı sadece bireylerin A-B sıralamasına dayanmalıdır.
- C'nin eklenmesi, kaldırılması veya sıralanması sonucu değiştiremez.
- Buradaki amaç; manipülasyon ve tutarsızlıkları önlemektir.

4. Diktatörlük Yokluğu:

- Hiçbir birey toplumun kararını tek başına belirleyemez.
- Eğer toplum sürekli aynı bireyin sıralamasını izliyorsa burada diktatörlük vardır.
- Adil bir yöntemde her bireyin etkisi sınırlı, eşit ve dengelidir.
- Arrow'a göre bu koşulu sağlayan sistem üretmek imkânsızdır.

5. Geçişlilik (Transitivity):

- Toplumsal tercihler mantıklı olmalıdır.
- $A > B$ ve $B > C$ ise mutlaka $A > C$ olmalıdır.
- Aksi hâlde döngü oluşur ($A > B$, $B > C$, $C > A$).
- Bu döngüde toplumsal tercih, tutarsız ve geçersiz hale gelir.



Sonuç – Arrow İmkânsızlık Teoremi:

- Bu 5 koşulu aynı anda sağlayan bir sistem mümkün değildir.
- Tam anlamıyla adil, tutarlı ve manipülasyonsuz bir yöntem yoktur.
- Arrow teoremi modern sosyal tercih teorisini şekillendirmiştir.
- Demokrasi ve seçim mekanizmaları bu sınırlar içinde tasarlanır.

MATEMATİKSEL İFADESİ

Alternatifler kümesi:

$$A = \{a, b, c, \dots\}, |A| \geq 3$$

Bireyler kümesi:

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

Her bireyin zayıf tercihi: i numaralı bireyin alternatifler arasındaki genel tercih ilişkisini anlatır. $R_i \in (i \in N)$. Bu refleksif, tam ve geçişli bir ikili ilişkidir.

Katı tercih: P_i şeklinde gösterilir. Katı tercih ; $x' in y'$ 'ye kesin olarak tercih edilmesidir.

$$xP_iy \Leftrightarrow (xR_iy \text{ ve } yR_ix)$$

Burada xP_iy : birey i 'nin x 'i y 'ye tercih etmesi demektir; bu, x 'in y 'den kötü olmaması ve y 'nin x 'ten iyi olmaması durumunda tanımlanır.

Tercih profili: $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$; R , bir bireyin sahip olabileceği tüm zayıf, rasyonel tercih sıralamalarının kümesidir; her bireyin tercihi bu kümeden seçilir.

$$R = \{R_i : R_i \text{ zayıf tercihlerin sıralama kümesi}\}$$

Sosyal tercih fonksiyonu: Bu fonksiyon bireylerin tüm tercihlerini birlikte alıp toplum adına tek bir rasyonel tercih sıralaması üreten kuraldır.

$$f: R^n \rightarrow R$$

Fonksiyon her profile bir sosyal zayıf sıralama atar.

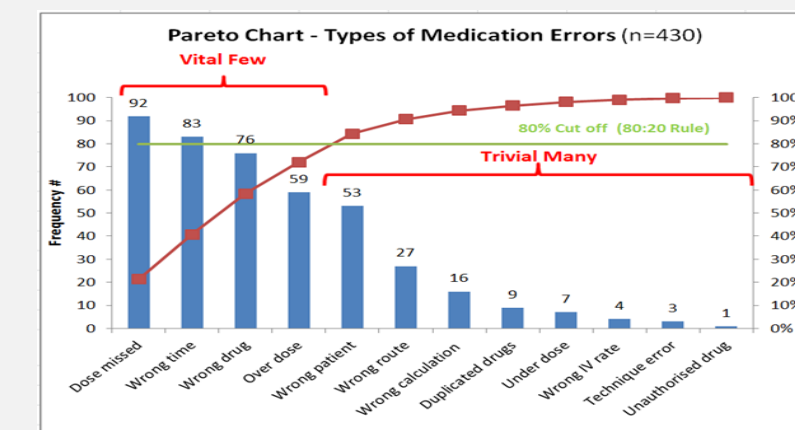
(1) Evrensellik (UD):

f fonksiyonu her $(R_1, R_2, \dots, R_n) \in R^n$ için tanımlıdır. Her bireysel tercih profili mümkündür.

(2) Pareto etkinliği (Unanimity):

Her $i \in (N : xP_iy) \rightarrow xPy$

Eğer herkes x 'i y 'ye tercih ediyorsa toplum da öyle yapmalıdır.



(3) İlgisiz seçeneklerden bağımsızlık (IIA):

İki profil düşünün : $R = (R_1, \dots, R_n)$, $R' = (R'_1, \dots, R'_n)$

Eğer tüm bireyler için $xR_iy \Leftrightarrow xR'_iy$ ise, o zaman sosyal tercihler aynı olmalıdır: $xRy \Leftrightarrow xR'y$

Yani toplumun x - y sıralaması, yalnızca bireylerin x - y sıralamasına bağlıdır, diğer alternatiflerden etkilenmez.

(4) Diktatörlük yokluğu (ND):

Hiçbir birey i için: $\forall x, y \in A, xP_iy \Rightarrow xPy$ geçerli-olmamalıdır. Yani tek bir birey toplumun tamamını belirleyemez.

Teoremin matematiksel ifadesi:

$$UD \wedge \text{Pareto} \wedge \text{IIA} \Rightarrow \text{Diktatörlük}$$

Eğer bir sosyal tercih fonksiyonu UD, Pareto ve IIA koşullarını sağlıyorsa, o zaman mutlaka en az bir $i^* \in N$ vardır ki:

$$\forall x, y \in A \text{ için } xP_{i^*}y \Rightarrow xPy$$

olur. Yani birey i^* , tüm alternatif çiftlerinde sosyal tercihi belirler $\rightarrow$ diktatördür.

TEOREM VE GÜNLÜK HAYAT

Demokratik hükümetlerde politika

Politika, resmî ve karmaşık karar alma süreçleri gibi görünse de aslında mesele şudur:

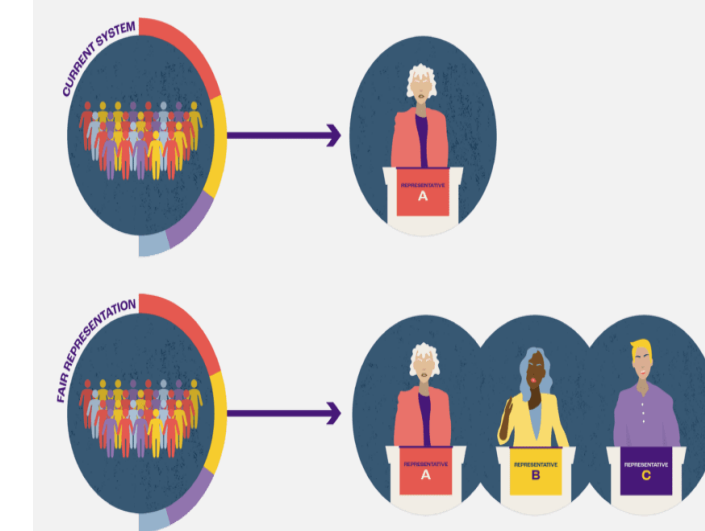
"Bir ülkede insanlar farklı şeyler isterken, hükümet herkesi nasıl memnun edebilir?"

Herkesin farklı talepleri doğrultusunda, tamamen adil ve toplumun kabul edeceği bir karar yöntemi oluşturmak her zaman mümkün değildir.

Vergilendirmenin veya kamu mallarının dağıtımının adaletinin değerlendirilmesi

Devletin topladığı vergileri nereye harcayacağı—okullara mı, hastanelere mi, yoksullara mı—konusunda toplumun farklı görüşleri olabilir.

Örnek: Aileler daha çok okul yapılmasını ister. Yaşlılar hastanelerin geliştirilmesini ister. İş dünyası yolların ve altyapının güçlendirilmesini ister. Arrow teoremi bize şunu hatırlatır: Bütün bu talepleri aynı anda ve tam adaletle karşılayan bir karar verme sistemi kurmak matematiksel olarak mümkün değildir.



KAYNAKÇA

https://en.wikipedia.org/wiki/Arrow%27s_impossibility_theorem
<https://study.com/academy/lesson/arrows-impossibility-theorem-its-use-in-voting.html>
<https://academic.oup.com/book/45622/chapter-abstract/394864359?redirectedFrom=fulltext>
<https://plato.stanford.edu/entries/arrows-theorem/>
<https://chatgpt.com/>